DEFINIZIONI DI LIMITE

$\lim_{x\to x_0} f(x) = l \iff \forall\epsilon > 0\ \exists I(x_0) \mid \forall x \in I(x_0) \Rightarrow \lvert f(x) - l\rvert < \epsilon$
$\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty \iff \forall M > 0\ \exists I(x_0) \mid \forall x \in I(x_0) \Rightarrow f(x) > M$ $\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty \iff \forall M > 0\ \exists I(x_0) \mid \forall x \in I(x_0) \Rightarrow f(x) < -M$
$\lim_{x\to\infty} f(x) = l \iff \forall\epsilon > 0\ \exists N > 0 \mid \forall x > N \Rightarrow \lvert f(x) - l\rvert < \epsilon$ $\lim_{x\to-\infty} f(x) = l \iff \forall\epsilon > 0\ \exists N > 0 \mid \forall x < -N \Rightarrow \lvert f(x) - l\rvert < \epsilon$
$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty \iff \forall M > 0\ \exists N > 0 \mid \forall x > N \Rightarrow f(x) > M$ Se qualcuna delle quantità tende a $-\infty$, “aggiustare” di conseguenza N e/o M nelle definizioni ($f(x) > M$ diventa $f(x) < -M$ e $x > N$ diventa $x < -N$)

LIMITI NOTEVOLI

$\lim_{x\to0}\frac{\sin(x)}{x} = 1$	$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos(x)}{x} = 0$	$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2}$
$\lim_{x\to0}\frac{\tan(x)}{x} = 1$	$\lim_{x\to0}\frac{\arcsin(x)}{x} = 1$	$\lim_{x\to0}\frac{\arctan(x)}{x} = 1$
$\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1$	$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt[n]{1+x}-1}{x} = \frac{1}{n}$	$\lim_{x\to0}\frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha$
$\lim_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = 1$	$\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{x} = 1$	$\lim_{x\to0}\frac{a^x-1}{x} = \ln(a)$
$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$	$\lim_{x\to0} x^\alpha \ln(x) = 0\ se\ \alpha > 0$	$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(x)}{x^\alpha} = 0\ se\ \alpha > 0$

Ordine di infinito (dominano i monomi di grado maggiore):

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots} = \begin{cases} \pm\infty \cdot sgn\left(\frac{a_n}{b_n}\right)\ se\ n > m \\ \frac{a_n}{b_n}\ se\ n = m \\ 0\ se\ n < m \end{cases}$$

Ordine di infinitesimo: in un rapporto tra infinitesimi (somme algebriche di monomi che tendono a zero) dominano i monomi di grado minore

Nel caso di altre funzioni, notare che generalmente l’esponenziale domina su tutte le altre funzioni, il logaritmo è dominato da tutte le altre. Attenzione comunque a verificare caso per caso.

ALCUNI TEOREMI SUI LIMITI

Si ipotizza che le funzioni di cui si tratta siano definite in un intorno del punto limite (effettuare analisi del dominio della funzione) e che, se esse sono indicate in ipotesi, ammettano effettivamente limite. Sussistono i seguenti teoremi, laddove il risultato non contenga una forma indeterminata:

$\lim_{x\to x_0} f(x) \pm g(x) = l_f \pm l_g \quad \lim_{x\to x_0} f(x)\cdot g(x) = l_f \cdot l_g \quad \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{l_f}{l_g}$
In ipotesi generalmente valide nei casi di interesse pratico, è possibile calcolare limiti anche per “sostituzione” di una funzione interna: $\lim_{x\to x_0} f(x) = l \Rightarrow \lim_{x\to x_0} g\big(f(x)\big) = \lim_{y\to l} g(y)$

E' anche possibile applicare ad ambo i membri di un limite una funzione (continua nell'intorno del limite), ottenendo quindi un risultato differente ma utile. Ad esempio: $$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e \Rightarrow \ln\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x\to\infty}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \ln e = \ln e = 1$$
Teorema del confronto: $\exists I(x_0)\mid g(x)\le f(x)\le h(x), \forall x\in I(x_0)$, $\lim_{x\to x_0} g(x)=l$, $\lim_{x\to x_0} h(x)=l$ $\Rightarrow \lim_{x\to x_0} f(x)=l$. NB Se $g(x)\to\infty$ oppure $h(x)\to-\infty$, la funzione $f(x)$ è "dominata" nella disuguaglianza, e pure tende allo stesso limite. In tal senso basta una sola disuguaglianza: $\exists I(x_0)\mid g(x)\le f(x)$ oppure $\exists I(x_0)\mid f(x)\le h(x)$
Teorema di unicità del limite: $\lim_{x\to x_0} f(x)=l_1$ e $\lim_{x\to x_0} f(x)=l_2$ implica $l_1=l_2$
Teorema della permanenza del segno: $\lim_{x\to x_0} f(x)=l>0 \Rightarrow \exists I(x_0)\mid f(x)>0, \forall x\in I(x_0)$

FORME INDETERMINATE

Le seguenti espressioni algebriche, che compaiono nel calcolo dei limiti, si dicono indeterminate in quanto non corrispondono ad un elemento di $\mathbb{R}\cup\{+\infty,-\infty\}$.

$$\frac{0}{0}\cdots\frac{\infty}{\infty}\cdots 0\cdot\infty\cdots 0^0\cdots 0^\infty\cdots 1^\infty\cdots\infty-\infty$$

Qualsiasi espressione che contenga le suddette forme indeterminate è, di norma, da considerarsi a sua volta indeterminata.

TECNICHE DI CALCOLO E CONSIGLI

- Per prima cosa si verifica se la funzione di cui stiamo calcolando il limite sia definita in x_0, provando a calcolare il limite per sostituzione
- Forma indeterminata non vuol dire limite non risolvibile
- Quando abbiamo una forma 0/0 con polinomi, possiamo mettere in evidenza (o dividere con il criterio di Ruffini) per eliminare l'indeterminazione
- Limiti con radicali si risolvono spesso con razionalizzazioni del numeratore, ed eventualmente evidenziando la x di grado massimo nelle espressioni (compresi i radicali)
- Poiché i limiti notevoli sono espressi con $x\to 0$ oppure $x\to\infty$, potrebbe essere opportuno effettuare una sostituzione per ricondursi ai casi precedenti (es. $x\to 3\Rightarrow y=x-3\Rightarrow\ y\to 0$
- Quando vediamo nell'espressione del limite una "parte" di un limite notevole, possiamo "far comparire" la parte mancante con manipolazione algebrica (es. moltiplico e divido)